

# ارزیابی رویکردهای مختلف در پیش‌بینی الگوی ترک در عملیات ایجاد شکاف هیدرولیکی در مخازن نفتی و ارائه یک رویکرد جدید

پژوهش نفت

سال بیست و دوم

شماره ۷۲

صفحه ۷۳-۵۸، ۱۳۹۱

تاریخ دریافت مقاله: ۹۰/۲/۲۹

تاریخ پذیرش مقاله: ۹۱/۹/۲۷

علی پاک\* و سوده صمیمی

دانشگاه صنعتی شریف- دانشکده مهندسی عمران

pak@sharif.ir

می‌گیرد. در انتها چارچوب و فرمول‌بندی یک مدل عددی با قابلیت مدل‌سازی ترک‌ها در محیط سه بعدی و لحاظ کردن اثرات ژئومکانیکی مخزن و جریان دو سیال ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: شکاف هیدرولیکی، مخازن نفتی زیرزمینی، تحلیل چندفاز، مدل‌سازی عددی، اثرات ژئومکانیکی

## مقدمه

شکست هیدرولیکی فرآیندی است که طی آن یک سیال ویسکوز تحت فشار و با نرخ جریان نسبتاً بالا به داخل یک گمانه تزریق می‌شود تا بدین طریق یک سیستم ترک در زمین ایجاد شده و انتشار یابد. فرآیند شکست هیدرولیکی سازندهای زیرزمینی، طی چند دهه گذشته به طور گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف مهندسی مورد توجه قرار گرفته است. در صنایع نفت و گاز، از این تکنیک برای ایجاد ترک‌های خیلی بزرگ با قابلیت هدایت هیدرولیکی

## چکیده

شکست هیدرولیکی، به پروسه ایجاد ترک در زمین به وسیله تزریق تحت فشار یک سیال ویسکوز به داخل یک گمانه اتلاق می‌گردد که در صنایع نفت و گاز به صورت گسترده برای تحریک مخازن نفتی با نفوذپذیری پایین مورد استفاده قرار می‌گیرد. اطلاعات صحرائی مربوط به عملیات شکست هیدرولیکی عمدتاً به صورت منحنی‌های فشار-زمان موجود است که تعیین هندسه واقعی ترک هیدرولیکی با استفاده از این اطلاعات به تنهایی ممکن نیست. از این رو، طراحی و کنترل فرآیند شکست هیدرولیکی تنها با تکیه بر مدل‌های ریاضی و عددی پیچیده امکان‌پذیر است. در این راستا، طی چند دهه گذشته مدل‌های تحلیلی و عددی متعددی شامل مدل‌های دوبعدی، شبه سه بعدی و سه بعدی، جهت پیش‌بینی محل، جهت و گستردگی ترک‌های هیدرولیکی ابداع شده‌اند. در مقاله حاضر، پس از بیان کاربردها و مکانیزم رخداد شکست هیدرولیکی، رویکردهای مختلف در تحلیل مسأله و پیش‌بینی الگوی ترک در سازندهای نفتی مورد بحث و بررسی قرار

موجب شده است که تحلیل این پدیده و تلاش برای دستیابی به یک مدل مناسب برای شبیه‌سازی آن، به شدت مورد توجه قرار گیرد. با این وجود، اهمیت پروسه شکست هیدرولیکی در صنعت نفت و گاز به منظور دستیابی به ذخایر هیدروکربن یا افزایش میزان تولید آنها، اصلی‌ترین انگیزه برای ایجاد چنین مدل‌هایی بوده است.

در مقاله حاضر، ابتدا تکنیک ایجاد شکست هیدرولیکی در حوزه صنایع نفت و گاز بررسی شده و پس از آن مکانیزم رخداد شکست هیدرولیکی و معادلات تئوریک حاکم بر آن تشریح می‌گردد. در ادامه، شروع و انتشار شکاف هیدرولیکی به لحاظ ژئومکانیکی مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس، انواع مدل‌های عددی دوبعدی، شبه سه‌بعدی و سه‌بعدی که تاکنون در صنایع نفت و گاز مورد استفاده قرار گرفته‌اند، همراه با نقاط قوت و ضعف آنها نقد و بررسی می‌شود. در انتهای مقاله، چارچوب و فرمول‌بندی یک مدل عددی سه‌بعدی با لحاظ کردن خصوصیات ژئومکانیکی مخزن و ویژگی‌های سیالات ارائه می‌گردد.

### شکست هیدرولیکی در صنایع نفت و گاز

اولین کاربرد ثبت شده عملیات شکست هیدرولیکی برای افزایش میزان استحصال نفت و گاز از مخازن هیدروکربن زیرزمینی، به میدان نفتی هاگوتون<sup>۳</sup> در کانزاس غربی مربوط می‌شود که در سال ۱۹۴۷ به منظور مقایسه با تکنولوژی اسیدی کردن چاه‌ها، بر روی یک چاه گاز در این ناحیه انجام شد. پس از آن و تا اواسط دهه ۱۹۶۰، شکست هیدرولیکی به روش غالب برای تحریک<sup>۴</sup> چاه‌های نفت در این ناحیه و دیگر نواحی تبدیل گردید [۲ و ۷].

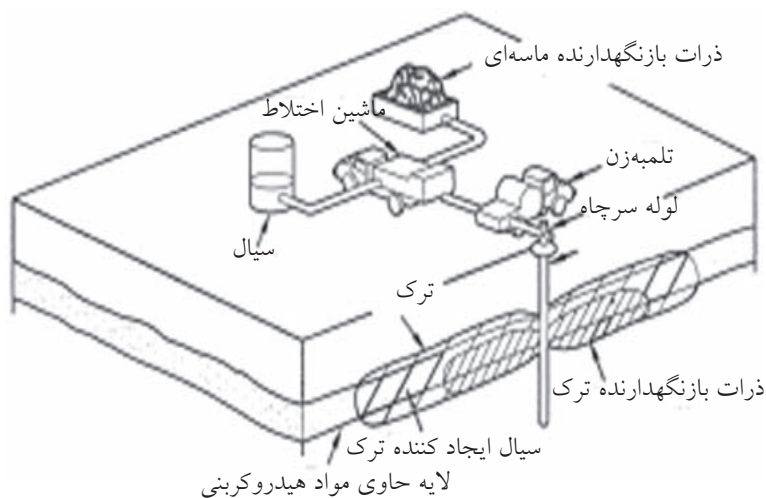
شکل ۱ یک مثال مفهومی از پروسه معمول شکست هیدرولیکی را نمایش می‌دهد. برای تحریک مخازن نفتی به روش شکست هیدرولیکی، عملیات باید طوری طراحی شود که ترک در ساختار سنگی که حاوی مواد هیدروکربنی است<sup>۵</sup> (مخزن) قرار گیرد.

بالا، جهت افزایش نرخ جریان نفت و گاز از مخازن هیدروکربن با نفوذپذیری پایین، به سمت چاه‌های حفاری شده استفاده می‌شود. در حوزه مهندسی محیط زیست، این تکنیک روشی مؤثر در افزایش کارایی روش‌های آلودگی‌زایی در جای<sup>۱</sup> خاک‌های آلوده بوده است. استحصال انرژی حرارتی زمین<sup>۲</sup> به وسیله ایجاد شکاف هیدرولیکی در توده سنگ‌های گرم و خشک و استفاده از چرخه سیال، از دیگر کاربردهای این فرآیند می‌باشد. در مکانیک سنگ، این روش تنها روش قابل اطمینان برای اندازه‌گیری میدان تنش‌های درجا می‌باشد که به دلیل سادگی به طور گسترده مورد استفاده قرار می‌گیرد. از کاربردهای مهم دیگر این تکنولوژی می‌توان به مواردی نظیر: دفع زیرزمینی پساب‌ها و سیالات سمی، تحریک چاه‌های آب به منظور افزایش تولید آب و در صنایع معدنی به عنوان یک سیستم کمکی در حفاری سنگ‌های معدنی در مقیاس بزرگ، اشاره نمود [۱-۴].

علی‌رغم همه کاربردهای فوق که شکست هیدرولیکی در آنها به عنوان یک روش مفید مطرح می‌شود، وقوع آن در برخی موارد موجب می‌گردد تا این پدیده به صورت یک پدیده مخرب و غیرمطلوب مورد توجه قرار گیرد. به عنوان مثال، در حوزه سدسازی، شکست هیدرولیکی می‌تواند یکی از عوامل ایجاد ترک در هسته سدهای خاکی باشد که از عواقب آن افزایش نشت و در برخی موارد خرابی سد خاکی بوده است [۳]. در زمینه دفع زمینی زائدات هسته‌ای، تجزیه مواد رادیواکتیو دفن شده در خاک‌ها و سنگ‌های اشباع باعث تولید گرما و در نتیجه انبساط توأم خاک و آب می‌شود. اما از آنجایی که ضریب انبساط آب حفره‌ای از دانه‌های جامد خاک بیشتر است، فشار آب حفره‌ای افزایش یافته و می‌تواند منجر به ایجاد ترک در خاک گردد [۵]. در طراحی عملیات تزریق دوغاب نیز ترک‌های هیدرولیکی که ممکن است طی عملیات تزریق دوغاب نفوذی یا تحکیمی ایجاد شوند، می‌توانند توانایی دوغاب برای آب بند نمودن یا افزایش مقاومت را به طور قابل ملاحظه‌ای کاهش دهند [۶].

بنابراین، ضرورت شناخت مکانیزم شروع و نحوه انتشار ترک‌های هیدرولیکی در شاخه‌های مختلف مهندسی

1. In-situ Remediation  
2. Geothermal Energy  
3. Hugoton  
4. Stimulation  
5. Payzone



شکل ۱- نمونه‌ای از عملیات شکست هیدرولیکی در صنعت نفت [۵]

ایجاد شکاف هیدرولیکی، مرحله آخر پاک‌سازی سیال باقی مانده از ترک است، به این صورت که پس از پمپاژ دوغاب، سیال تزریق شده به لحاظ شیمیایی به یک سیال با ویسکوزیته پایین‌تر تجزیه شده<sup>۵</sup> و به صورت جریان برگشتی به سمت چاه و به خارج از ترک، جریان می‌یابد. بدین ترتیب در پایان عملیات، یک کانال با نفوذپذیری بالا در مخزن هیدروکربن ایجاد می‌گردد و این امکان را فراهم می‌کند تا نفت و گاز از لایه حاوی این منابع به سمت چاه حفاری شده جریان یابند [۲، ۴ و ۸].

### مکانیزم شکست هیدرولیکی و معادلات حاکم بر آن

همان‌طور که پیشتر مشاهده شد، با استفاده از تکنیک شکست هیدرولیکی، یک ترک تحت اثر فشار سیال تزریقی در سازند حاوی مخزن نفت و گاز ایجاد می‌شود که دارای عرض باریک و گستردگی سطحی بزرگ بوده و در صفحه عمود بر محور تنش اصلی حداقل درجا انتشار می‌یابد. با توجه به اینکه در بیشتر کاربردهای پروسه شکست هیدرولیکی و در اعماق زیاد در زیرزمین، تنش اصلی حداقل درجا، افقی می‌باشد، لذا ترک‌های هیدرولیکی ایجاد شده در اعماق زیاد در اغلب موارد قائم و دارای گسترش صفحه‌ای هستند. این موضوع به وسیله

این امر معمولاً به وسیله تکنیکی که سوراخ کاری<sup>۱</sup> لوله جدار نامیده می‌شود، تحقق می‌یابد. سپس، با قرار دادن پکرهایی در بالا و پایین بازه سوراخ شده، یک سیال ویسکوز تحت نرخ و فشارهای بالا به داخل گمانه تزریق می‌شود تا یک ترک اولیه در ناحیه سوراخ شده چاه ایجاد شود. در این مرحله معمولاً در ابتدا یک سیال تمیز<sup>۲</sup> به سمت پایین پمپ می‌شود تا با شروع و گسترش ترک، عرض شکست کافی برای جریان ذرات بازنگهدارنده<sup>۳</sup> را که بعداً تزریق خواهند شد، فراهم کند. در ادامه پروسه تزریق، یک فاز دانه‌ای تحت عنوان ذرات بازنگهدارنده ترک به تدریج با سیال تزریقی مخلوط می‌شود. دوغاب حاصل از این اختلاط، در حالی که موجب گسترش ترک می‌شود به طور هم‌زمان ذرات بازنگهدارنده را همراه با خود به داخل ترک حمل می‌کند. این عمل تضمین می‌نماید زمانی که عملیات پمپاژ متوقف می‌گردد، ترک ایجاد شده، توسط این ذرات باز نگه داشته می‌شود. پس از آن که ترک با اندازه طراحی شده ایجاد شد، عملیات پمپاژ متوقف می‌شود. معمولاً برای یک بازه زمانی کوتاه پس از شروع این دوره که تحت عنوان دوره بسته شدن<sup>۴</sup> نامیده می‌شود، انتشار ترک ادامه می‌یابد. اما با تراوش تدریجی سیال شکست داخل ترک به محیط متخلخل اطراف، به تدریج فشار هیدرولیکی داخل ترک کاهش یافته تا اینکه در نهایت، سطوح ترک تحت اثر تنش‌های فشاری میدان دور، بر روی مجموعه ذرات بازنگهدارنده بسته می‌شوند. پس از پایان فرآیند

1. Perforation
2. Neat Fluid
3. Proppant
4. Shut-in Period
5. Break Back

یک سیال غیرترکننده (مثل نفت)، به فرم زیر بیان می‌شوند [۱۰]:

(۱) معادله تعادل مومتم خطی کل محیط چندفازه:

$$\sigma_{i,j,j} + \rho g_i = 0$$

(۲) معادله تعادل مومتم خطی فازهای سیال:

$$\frac{1}{\rho_w} [\rho_w n S_w \dot{u}_i^{ws}]_i + \left[ S_w \frac{\alpha - n}{K_s} \left( S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c \right) + \frac{n S_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{\partial p_w}{\partial t} + \left[ S_w \frac{\alpha - n}{K_s} \left( 1 - S_w - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{\partial p_w}{\partial t} + \alpha S_w \dot{u}_{i,i} = 0$$

(۳) معادله پیوستگی فاز ترکننده

$$\left[ S_w \frac{\alpha - n}{K_s} \left( 1 - S_w - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{\partial p_{mv}}{\partial t} + \alpha S_w \dot{u}_{i,i} = 0$$

(۴) معادله پیوستگی فاز غیرترکننده

$$\frac{1}{\rho_{mv}} [\rho_{mv} n S_{mv} \dot{u}_i^{mvs}]_i + \left[ S_{mv} \frac{\alpha - n}{K_s} \left( S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c \right) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \frac{\partial p_w}{\partial t} + \left[ S_{mv} \frac{\alpha - n}{K_s} \left( S_{mv} - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c \right) - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} + \frac{n S_{mv}}{K_{mv}} \right] \frac{\partial p_{mv}}{\partial t} + \alpha S_{mv} \dot{u}_{i,i} = 0$$

در این روابط،  $\sigma_{ij}$  تنش کل،  $\rho$  دانسیته محیط چند فازه،  $g_i$  شتاب ثقل،  $n$  پوکی یا تخلخل محیط،  $S_w$  و  $P_w$  درجه اشباع و فشار منفذی فازهای سیال، اندیس‌های  $w$  و  $mv$  به ترتیب نماینده سیال ترکننده و غیرترکننده،  $\dot{u}_i^{ws}$  سرعت نسبی فازهای سیال نسبت به فاز جامد،  $k_{ij}$  تانسور نفوذپذیری ذاتی،  $k_{i\pi}$  ضریب نفوذپذیری نسبی فازهای سیال،  $\mu_\pi$  ویسکوزیته دینامیکی سیال،  $\rho_\pi$  دانسیته فازهای سیال، پارامتر بیو<sup>۳</sup>،  $K_s$  و  $K_\pi$  به ترتیب مدول بالک دانه‌های جامد خاک و فازهای سیال،  $p_c$  فشار موئینگی،  $t$  زمان و  $\dot{u}_i$  سرعت فاز جامد می‌باشد.

بدین ترتیب، جهت تحلیل مسائل همبسته تغییر شکل سازند مخزن- جریان چند فاز سیال در یک محیط متخلخل (نظیر

اندازه‌گیری‌های محلی انجام شده در سایت‌های شکست هیدرولیکی در سنگ تأیید شده است [۱ و ۹].

بنابراین مسأله شکست هیدرولیکی یک مسأله سه بعدی است که در آن هدف، تعیین پروفیل بازشدگی ترک، طول و ارتفاع ترک و توزیع فشار سیال داخل ترک، به صورت تابعی از زمان و مکان به ازای نرخ جریان معلوم یا فشار سیال معلوم در گمانه می‌باشد. اما مدل‌سازی این پدیده سه بعدی کار ساده‌ای نیست. چراکه شکست هیدرولیکی در پایه‌ای‌ترین شکل خود شامل همبستگی بین حداقل سه پروسه می‌گردد. این سه پروسه عبارتند از: الف- تغییر شکل‌های محیط جامد (سازند)، ب- شروع و انتشار ترک در محیط و ج- جریان سیال در داخل ترک و محیط متخلخل اطراف و تراوش آن از ترک به سازند [۲]. در نتیجه، به منظور مدل‌سازی پروسه شکست هیدرولیکی لازم است سه معادله حاکم بر: ۱- رفتار ژئومکانیکی مخزن، ۲- جریان در محیط متخلخل و ۳- جریان در ترک، همراه با یک شرط برای کنترل شروع و گسترش ترک، به روشی کارا و پایدار و به طور مناسبی با هم به صورت همبسته حل شوند تا جواب مسأله مرز متحرک، شامل: عرض ترک، طول و ارتفاع ترک، و فشار سیال به صورت تابعی از زمان و مکان به دست آید [۲].

#### معادلات ژئومکانیکی<sup>۱</sup> و جریان سیال در محیط متخلخل

به طور کلی، مجموعه معادلات حاکم بر یک محیط متخلخل تغییر شکل پذیر چند فازه شامل: ۱- معادله تعادل مومتم برای کل محیط چند فازه، ۲- معادله تعادل مومتم برای هر یک از فازهای سیال و ۳- معادله بقای جرم برای هر یک از فازهای محیط متخلخل می‌شود که از ترکیب معادله بقای جرم فاز جامد با معادله بقای جرم هر یک از فازهای سیال، معادله تعادل جرم یا پیوستگی فازهای سیال در کلی‌ترین حالت به دست می‌آید. با فرض اینکه سیستم چند فازه تحت شرایط همدمای<sup>۲</sup> قرار داشته باشد، از تبدیل فاز و واکنش‌های فیزیکی- شیمیایی بین فازهای مختلف صرف نظر شود و فازهای سیال، ویسکوز و مخلوط نشدنی<sup>۳</sup> در نظر گرفته شوند، مجموعه معادلات مذکور برای یک محیط متخلخل تغییر شکل پذیر سه فازه (شامل دانه‌های جامد خاک، سیال ترکننده (مثل آب) و

1. Geomechanical Equations  
2. Isothermal  
3. Immisible  
4. Biot

یکه قائم روی مرز،  $\Gamma_\sigma$  مرز تنش،  $\Gamma_p$  مرز فشار حفره‌ای و  $\Gamma_q$  مرز شار می‌باشد.

#### معادله جریان سیال در ترک

مشابه جریان سیال در محیط متخلخل، معادلات حاکم بر جریان در ترک شامل معادله بقای جرم و معادله تعادل مومنتم می‌باشد [۱۱ و ۱۴]. برای یک سیال تراکم ناپذیر، معادله بقای جرم سیال در ترک به شکل معادله ۱۰ بیان می‌گردد [۲، ۱۵ و ۱۶]:

$$\frac{\partial w(\bar{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \bar{q}(\bar{x}, t) - q_r(\bar{x}, t) + q_l(\bar{x}, t) = 0 \quad (10)$$

معادله تعادل مومنتم نیز با فرض اینکه سیال درون ترک تراکم‌ناپذیر و دارای جریان آرام باشد، با استفاده از تئوری جریان سیال بین صفحات موازی، برای یک سیال نیوتنی و یک سیال غیرنیوتنی با رفتار رئولوژیک از نوع قانون توانی، به ترتیب به فرم معادلات ۱۱-الف و ۱۱-ب تبدیل می‌شود [۲، ۱۵ و ۱۶]:

(۱۱-الف) برای سیال نیوتنی با ویسکوزیته  $\mu$

$$\bar{q} = -\frac{w^3}{12\mu} (\nabla p - \rho \bar{g})$$

(۱۱-ب) برای سیال غیرنیوتنی با رفتار رئولوژیک قانون توانی

$$\bar{q} = -a(w, |\nabla p - \rho \bar{g}|) (\nabla p - \rho \bar{g})$$

در معادلات فوق،  $w$  عرض ترک،  $\bar{x} = (x, z)$ ،  $q_r$  ترم چشمه یا منبع می‌باشد که نمایش‌دهنده نرخ تزریق است،  $q_l$  نرخ تراوش سیال از واحد سطح ترک به سازند،  $\bar{q}$  شار جریان،  $\mu$  ویسکوزیته سیال،  $P$  فشار سیال،  $\rho$  دانسیته سیال،  $\bar{g}$  بردار ثقل،  $n'$  نمای قانون توانی،  $k'$  شاخص قوام<sup>۵</sup> می‌باشد همچنین جمله سمت راست در رابطه (۱۱-ب) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$a(w, |\nabla p - \rho \bar{g}|) = \frac{2n'}{2n'+1} \left(\frac{1}{k'}\right)^{\frac{1}{n'}} \left(\frac{w}{2}\right)^{\frac{2n'+1}{n'}} |\nabla p - \rho \bar{g}|^{\frac{1-n'}{n'}}$$

$$|\nabla p - \rho \bar{g}| = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x\right)^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z\right)^2}$$

#### شرایط مرزی برای جریان سیال داخل ترک

تأخیر سیال<sup>۶</sup> به فاصله بین محل جبهه حرکت سیال شکست

1. Non-local Kernel Function
2. Elastic Influence Function
3. Traction
4. Flux
5. Consistency Index
6. Fluid Lag

سازند اطراف یک ترک هیدرولیکی، لازم است که معادلات فوق به طور همزمان و به شیوه‌ای کاملاً همبسته حل شوند که در نتیجه آن مؤلفه‌های بردار تغییر مکان در سه راستای  $x, y, z$  و فشار سیالات منفذی در هر نقطه از محیط متخلخل قابل ارزیابی خواهند بود.

با این حال، در بسیاری از تحقیقات صورت گرفته در حوزه مدل‌سازی پروسه شکست هیدرولیکی، با فرض رفتار الاستیک خطی، از یک معادله انتگرالی منفرد به فرم کلی [۲]:

$$p(x, y, t) - \sigma_c(x, y) = \int_{\Omega(t)} C(x, y; \xi, \eta) w(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (5)$$

یا [۱۱]:

$$w(x, y, t) = \int_{\Omega(t)} f(x-x', y-y') [p(x', y') - \sigma_c(x', y')] dx' dy' \quad (6)$$

که مرتبط‌کننده بازشدگی ترک و فشار سیال داخل ترک می‌باشد، به عنوان معادله ژئومکانیکی استفاده شده است که از حل آن تنها عرض ترک قابل محاسبه خواهد بود. در روابط فوق،  $P$  فشار سیال داخل ترک،  $\sigma_c$  تنش درجای حداقل (یا تنش محصورکننده)،  $w$  عرض ترک،  $C$  تابع کرنل غیرمحللی<sup>۱</sup> که شامل تمامی اطلاعات در مورد محیط الاستیک لایه‌ای است و  $f$  تابع تأثیر الاستیک<sup>۲</sup> می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که ترک در زمان  $t$  ناحیه  $\Omega(t)$  را اشغال می‌کند.

#### شرایط اولیه و شرایط مرزی

با در نظر گرفتن جابه‌جایی اسکلت جامد خاک ( $u$ ) و فشار سیالات منفذی ( $p_m$  و  $p_w$ ) به عنوان مجهولات اصلی معادلات ژئومکانیکی و جریان سیال در محیط متخلخل اطراف ترک هیدرولیکی، شرایط اولیه و شرایط مرزی برای این معادلات به صورت زیر بیان می‌شود [۱۲ و ۱۳]:

شرایط اولیه:

(۷) شرایط اولیه

$$u_i = u_i^0, \quad p_\pi = p_\pi^0 \quad (\pi = w, m) \quad \text{at } t=0 \text{ and on } \Omega$$

شرایط مرزی برای میدان جابه‌جایی، که برحسب مقادیر معلوم جابه‌جایی ( $\bar{u}_i$ ) یا بردار تنش<sup>۳</sup> ( $\bar{\tau}_r$ ) خواهد بود:

$$u_i = \bar{u}_i \text{ on } \Gamma_u, \quad \sigma_{ij} n_j = \bar{\tau}_i \text{ on } \Gamma_\sigma \quad (8)$$

شرایط مرزی برای میدان فشار، که برحسب مقادیر معلوم

فشار ( $\bar{p}_\pi$ ) یا شار جریان<sup>۴</sup> ( $\bar{q}_\pi$ ) بیان می‌شود:

$$p_\pi = \bar{p}_\pi \text{ on } \Gamma_{p_\pi},$$

$$k_{ij} k_{r\pi} / \mu_\pi (-p_{\pi,j} + \rho_\pi g_j) n_i = \bar{q}_\pi \text{ on } \Gamma_{q_\pi} \quad (\pi = w, m) \quad (9)$$

در روابط فوق،  $\Omega$  دامنه مسأله،  $\Gamma_u$  مرز جابه‌جایی،  $n_i$  بردار

مصالح، شروع ترک یک پروسه آنی می‌باشد [۱۷].

به طور کلی، رفتار مصالح در ناحیه نزدیک نوک ترک می‌تواند غیرالاستیک و غیرخطی باشد. رویکرد مکانیک شکست الاستیک خطی زمانی کاربرد دارد که فرض رفتار الاستیک خطی برای مصالح، معتبر، و یا اندازه ناحیه پلاستیک تشکیل شده در نوک ترک<sup>۱۱</sup> در مقایسه با طول ترک یا ابعاد جسم ترک خورده کوچک باشد. این رویکرد نمی‌تواند پروسه شروع ترک را پیش‌بینی نماید، در نتیجه به مسائلی که دارای یک ترک اولیه هستند، قابل اعمال است [۱۷].

رویکرد مکانیک شکست غیرخطی در مقایسه با دو رویکرد قبلی، رویکرد جامع‌تری است به طوری که با استفاده از آن می‌توان هم رخداد شروع ترک و هم فرآیند گسترش آن را شبیه‌سازی نمود. به علاوه معیارهای مکانیک شکست غیرخطی به جز کاربردهای پوروالاستیک، می‌توانند تحت شرایط تسلیم بزرگ مقیاس<sup>۱۲</sup>، که اندازه ناحیه پلاستیک تشکیل شده در نوک ترک بزرگ می‌باشد، نیز به کار برده شوند [۱۷].

با وجود معیارهای شکست متعدد، نکته قابل توجه در مورد مدل‌های عددی شکست هیدرولیکی، تهیه شده آن است که تعداد زیادی از آنها با فرض وجود یک ترک اولیه، تنها پروسه انتشار ترک را مورد بررسی قرار داده‌اند. به علاوه، بدلیل آنکه اکثر سنگ‌ها اساساً مصالحی ترد می‌باشند و شکل‌پذیری در پروسه شکست آنها مهم نمی‌باشد، معمولاً از مکانیک شکست الاستیک خطی و معیار متداول ضریب شدت تنش برای مدل‌سازی انتشار ترک استفاده نموده‌اند [۲].

و محل رأس در حال گسترش ترک اطلاق می‌شود. در شرایطی که سیال تزریقی به طور کامل ترک را پر می‌کند، یا به عبارت دیگر تأخیر سیال<sup>۱</sup> در مقایسه با مقیاس ترک ناچیز می‌باشد، برای حل معادله جریان در ترک یک شرط مرزی شار صفر در جلوی سیال قابل اعمال خواهد بود [۲]:

$$\bar{q} \cdot \bar{n} = 0 \Rightarrow a(w, |\nabla p - \rho \bar{g}|) \bar{n} \cdot (\nabla p - \rho \bar{g}) = 0 \quad (12)$$

که  $\bar{n}$  بردار یکه نرمال رو به خارج در امتداد محیط ترک می‌باشد. اما در صورت وجود تأخیر سیال، بسته به این که ترک در حال انتشار در یک محیط نفوذناپذیر باشد یا یک محیط نفوذپذیر، شرط مرزی جلوی سیال متفاوت خواهد بود. اگر رأس ترک در حال گسترش در یک محیط نفوذناپذیر باشد، تأخیر سیال معمولاً به صورت حفره‌ای حاوی سیال شکست تبخیر شده تحت فشار ثابت مدل می‌شود که فرض می‌شود این فشار در مقایسه با تنش محصورکننده ناچیز است. در نتیجه شرط مرزی در جلوی سیال، یک شرط فشار صفر خواهد بود. اما اگر محیط نفوذپذیر و تبادل سیال منفذی بین حفره و ساختار مخزن پیرامونی مجاز باشد، فشار سیال داخل حفره<sup>۲</sup> تأخیر صفر نبوده و باید از حل معادله پخش<sup>۲</sup> فشار منفذی پیرامون حفره، تعیین شود [۴].

### شرط شروع و انتشار ترک در مخزن از نظر معیارهای ژئومکانیکی

برای مدل‌سازی پدیده شکست و گسترش آن، روش‌های مختلفی وجود دارد که از آن جمله می‌توان به رویکرد مقاومت مصالح<sup>۳</sup> و مفاهیم مکانیک شکست<sup>۴</sup> شامل معیارهای مکانیک شکست الاستیک خطی<sup>۵</sup> (معیار ضریب شدت تنش<sup>۶</sup>، و نرخ آزاد شدن انرژی کرنشی<sup>۷</sup>) و معیارهای مکانیک شکست غیرخطی<sup>۸</sup> (نظیر معیار انتگرال  $J$ ، و بازشدگی نوک ترک<sup>۹</sup> یا مدل ترک چسبنده<sup>۱۰</sup>) اشاره نمود. از رویکرد مقاومت مصالح غالباً جهت پیش‌بینی شروع ترک استفاده می‌شود. در این رویکرد که به وسیله مقایسه تنش کششی (یا برشی) با مقاومت کششی (یا برشی) سنگ، شروع ترک تعیین می‌گردد، فرض می‌شود که رفتار مصالح الاستیک- ترد باشد. در نتیجه طبق رویکرد مقاومت

1. Fluid Lag
2. Diffusion
3. Strength of Material Approach
4. Fracture Mechanics
5. Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM)
6. Stress Intensity Factor (SIF)
7. Strain Energy Release Rate
8. Nonlinear Fracture Mechanics
9. Crack Opening Displacement (COD)
10. Cohesive Crack Model
11. Fracture Process Zone (FPZ)
12. Large Scale Yielding

دست آوردند. بعدها، به ترتیب گیریتسما و دی کلارک [۲۰]، و نوردگرین [۲۱]، با در نظر گرفتن اثرات هرزروی سیال تزریقی از ترک به سازند، دو مدل تهیه شده فوق را بسط دادند، و براین اساس این مدل‌ها بر مبنای اسامی ابداع کنندگان اصلی آنها، تحت عنوان مدل‌های  $KGD^2$  و  $PKN^2$  ارجاع داده می‌شوند.

گیریتسما و هافکنز [۲۲] دو مدل  $PKN$  و  $KGD$  را با هم مقایسه کردند و با توجه به هندسه در نظر گرفته شده در این دو مدل نتیجه گرفتند که برای نسبت‌های بزرگ طول به ارتفاع (ترک‌های طولانی با مقاطع عرضی قائم بیضوی و ارتفاع محدود)، مدل  $PKN$  باید استفاده شود و برای مقادیر طول به ارتفاع نزدیک به واحد یا کمتر (ترک‌های کوتاه که فرضیات کرنش مسطح به مقاطع افقی قابل اعمال است)، بهتر است از مدل  $KGD$  استفاده شود.

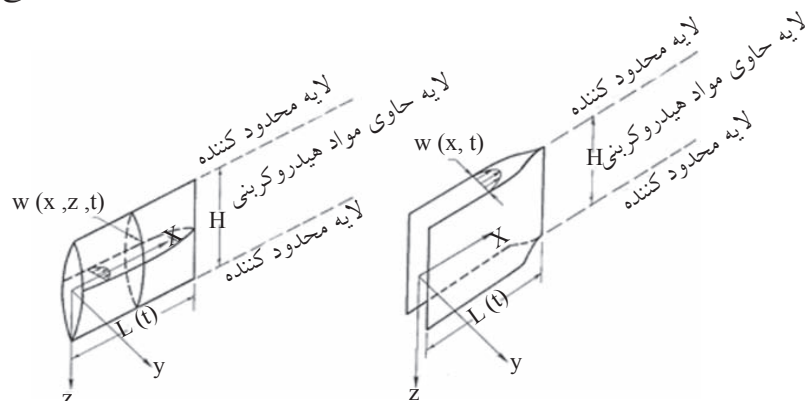
علاوه بر دو مدل کرنش مسطح فوق، از دیگر مدل‌های تحلیلی دوبعدی، مدل شعاعی یا سکه ای شکل می‌باشد (شکل ۳). هم پرکینز و کرن [۱۹]، و هم گیریتسما و دی کلارک [۲۰]، مسئله ترک‌های شعاعی را مورد بررسی قرار دادند، و مشابه مدل‌های کرنش مسطح با فرموله کردن آن، جواب‌های تحلیلی را برای بازشدگی حداکثر و شعاع ترک استنتاج نمودند. در این مدل نیز فرض می‌شود که سیال تنها در امتداد طول ترک (شعاع آن) جریان دارد. این مدل زمانی کاربرد دارد که جهت‌گیری چاه در جهت تنش محصورکننده حداقل باشد یا زمانی که سیال از یک مقطع سوراخ شده کوتاه به داخل لایه مخزن تزریق شود، به طوری که ناحیه تزریق عملاً یک منبع نقطه‌ای باشد [۲، ۱۱].

## مطالعات صورت گرفته در خصوص مدل‌سازی عددی شکست هیدرولیکی

اهمیت اقتصادی تکنولوژی شکست هیدرولیکی در صنایع نفت و گاز، موجب گردیده است که طی چند دهه گذشته تلاش‌های فراوانی در حوزه مدل‌سازی فرآیند شکست هیدرولیکی صورت پذیرد. طبیعتاً، تلاش‌های اولیه بر روی تحلیل تئوریک این فرآیند متمرکز شدند که با توجه به پیچیدگی‌های مسئله معمولاً به ترک‌ها با هندسه‌های ساده (یا به صورت کرنش مسطح یا با تقارن محوری) محدود می‌شدند. اما، محدودیت‌های مدل‌های تحلیلی به تدریج تمرکز تحقیقات را به سمت تهیه الگوریتم‌های عددی سوق دادند، به طوری که از این الگوریتم‌های عددی غالباً به منظور مدل‌سازی گسترش سه بعدی شکست‌های هیدرولیکی در ذخایر زیرزمینی، استفاده می‌شود. در ادامه، به بررسی تعدادی از این مدل‌های تحلیلی و عددی خواهیم پرداخت.

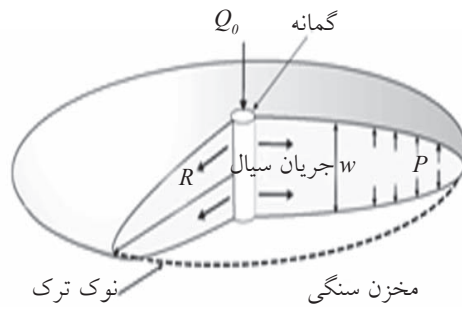
### مدل‌های تحلیلی و عددی دوبعدی

ایجاد اولین مدل‌های تئوریک ساده‌سازی شده برای شکست هیدرولیکی در دهه ۱۹۵۰ آغاز شد. از مقالات پیشگامی که در این زمینه منتشر گردید می‌توان به مقاله کریستیانویچ و زلتاو [۱۸]، و مقاله پرکینز و کرن [۱۹]، اشاره نمود. این محققین با پیشنهاد کردن دو مدل ساده دو بعدی برای هندسه ترک (شکل ۲)، و با فرض ثابت بودن ارتفاع ترک، انتشار ترک تنها در جهت  $x$  و عدم جریان سیال در جهت قائم، جواب‌های تحلیلی را برای بازشدگی حداکثر ترک، طول ترک، و فشار تزریق، به



شکل ۲- به ترتیب از راست به چپ، هندسه ترک مستطیلی  $KGD$  و  $PKN$  با ارتفاع ثابت محدود شده بین لایه‌های مرزی [۱]

1. Leak-off
2. Khristianovic and Zheltov- Geertsma and De Klerk
3. Perkins and Kern-Nordgren



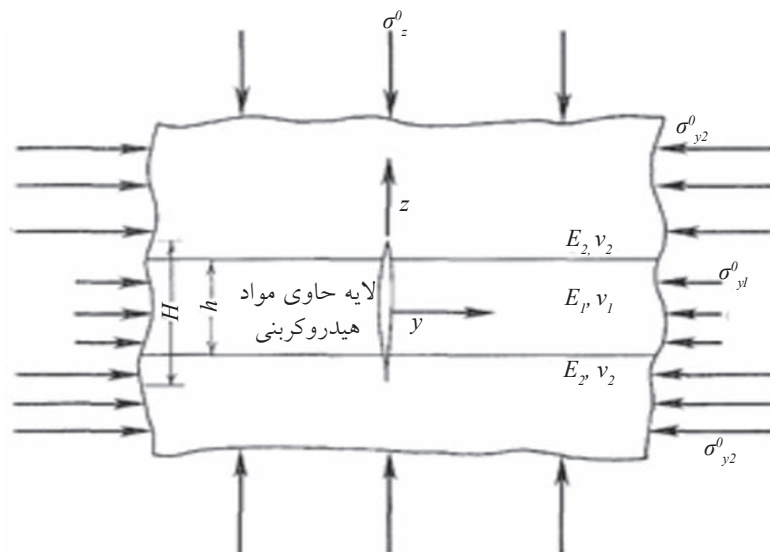
شکل ۳- نمایش شماتیک هندسه ترک شعاعی [۲]

به اندازه‌ای است که این لایه‌ها همانند موانعی در مقابل رشد قائم ترک عمل نموده و موجب شده ارتفاع ترک هیدرولیکی ثابت بماند. این یک محدودیت قابل ملاحظه است چرا که همیشه از اطلاعات پیمایش گمانه یا دیگر اطلاعات مشخص نیست که آیا ترک محصور خواهد شد یا نه، یا در کجا چنین امری رخ خواهد داد. به علاوه، ارتفاع ترک معمولاً از محل چاه تا نوک ترک تغییر می‌کند، بطوریکه اطلاعات صحرائی نشان داده‌اند ارتفاع ترک در نزدیکی گمانه می‌تواند به طور قابل توجه‌ای بزرگتر از ضخامت لایه حاوی مخزن نفت و گاز باشد. این عوامل، موجب شدند که استفاده از مدل‌های دوبعدی محدود شود و از طرفی، انگیزه‌ای برای ایجاد مدل‌های سه بعدی شدند که رشد قائم ترک را در نظر می‌گیرند [۱، ۱۱].

پس از کارهای اولیه فوق، تحقیقات متعدد دیگری نیز در زمینه مدل‌های تحلیلی انجام شد [۲۳-۲۵]. به علاوه، تعدادی از محققین سعی نمودند با در نظر گرفتن شرایط کلی تر (نظیر تراکم‌پذیری سیال تزریقی، شرایط غیرهمدم، و...) و حل عددی معادلات حاکم بر پروسه شکست هیدرولیکی در دوبعد، مدل‌های عددی دوبعدی را تهیه نمایند [۳-۵].

#### مدل‌های سه بعدی

استفاده از مدل‌های نسل اول شکست هیدرولیکی که مدل‌های ساده دو بعدی می‌باشند، نیازمند آن است که کاربر ارتفاع ترک را مشخص کند یا فرض نماید که یک ترک شعاعی ایجاد خواهد شد. به عبارت دیگر، مدل‌های دوبعدی KGD و PKN فرض می‌کنند اختلاف و ناپیوستگی بین تنش حداقل در جای افقی  $(\sigma_{y\infty}^0)$  در شکل ۴) در مخزن نفت و گاز و لایه‌های بالا و پائین آن



شکل ۴- مقطع عرضی قائم یک ترک هیدرولیکی در بین دو نیم صفحه با تنش‌های ناپیوسته اما یکنواخت اعمال شده در بی‌نهایت [۲۶]



نیم بیضی پایینی محاسبه شده و شکل در نظر گرفته شده به این موقعیتها منطبق می شود [۲۶]. مدل های سلولی، شکل خاصی را برای ترک توصیه نمی کنند. در این مدلها، طول ترک به یک تعداد سلول های PKN مانند تقسیم می شود، بطوریکه هر سلول به طور مستقل از دیگری عمل می کند (شکل ۶). به علاوه فرض می شود که جریان سیال، اساساً افقی و در امتداد طول ترک می باشد. همانند مدل PKN، این فرضیات موجب می گردند که مدل های سلولی عمدتاً برای ترک های محصور شده به طور قابل قبول (که در مقایسه با ارتفاعشان، طولانی هستند)، مناسب باشند [۱۱].

#### مدل های سه بعدی با گسترش صفحه ای ترک

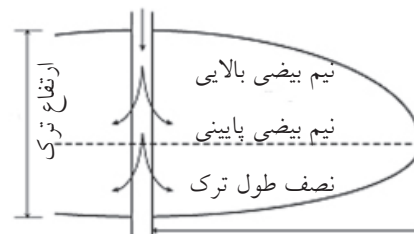
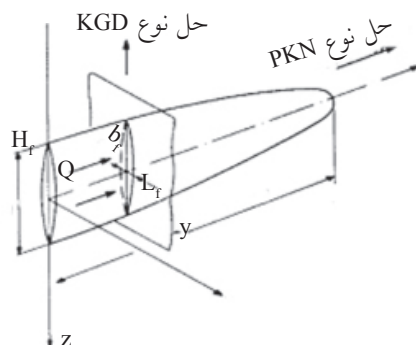
مدل های شبه سه بعدی شامل دو ساده سازی می شوند. اول آنکه، بیشتر مدل های شبه سه بعدی از جریان عمودی سیال در ترک صرف نظر می کنند. ثانیاً، با در نظر گرفتن تنها یک مقطع عرضی قائم منفرد که نمایش دهنده ارتفاع ماکزیمم ترک است، یا یک تعداد سلول یا مقاطع عرضی قائم مجزا که به لحاظ الاستیسیته از هم مستقل می باشند، پاسخ کاملاً سه بعدی محیط را به نحوی تقریب می زنند [۲۶].

اما با ایجاد مدل های سه بعدی با گسترش صفحه ای ترک محدودیت های فوق برطرف شد. چراکه این دسته از مدل های سه بعدی مدلهایی هستند که با در نظر گرفتن همزمان معادلات الاستیسیته کاملاً سه بعدی و جریان سیال در هر دو جهت طول و ارتفاع ترک، قادرند پاسخ سه بعدی محیط را با میدان کامل دوبعدی جریان سیال در

مدل های سه بعدی شکست هیدرولیکی که رشد ارتفاع ترک را در نظر می گیرند، بر مبنای فرضیات پایه ای شان به سه گروه اصلی تقسیم بندی می شوند: ۱- مدل های شبه سه بعدی، ۲- مدل های سه بعدی با گسترش صفحه ای ترک، ۳- مدل های سه بعدی کلی یا با گسترش آزاد ترک [۱۱].

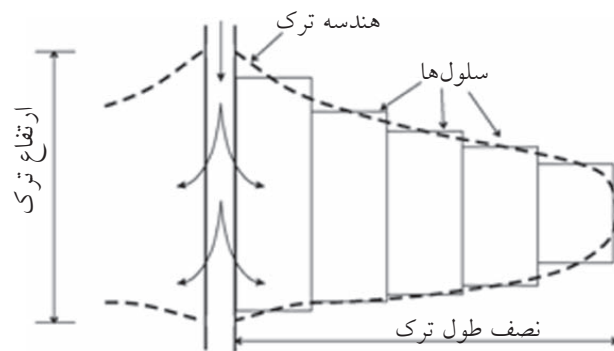
#### مدل های شبه سه بعدی

مدل های شبه سه بعدی، تلاشی خام اما مؤثر برای شبیه سازی رفتار فیزیکی یک شکست هیدرولیکی سه بعدی با گسترش صفحه ای، با هزینه محاسباتی حداقل می باشند. این مدل ها به طور کلی به دو گروه اصلی تقسیم می شوند: الف) مدل های متمرکز<sup>۳</sup>، و ب) مدل های سلولی<sup>۴</sup> [۲، ۱۱]. در مدل های متمرکز (یا بیضوی)، فرض می شود که پروفیل قائم ترک در هر لحظه زمانی از دو نیم بیضی که در مرکز و در جهت طول ترک به هم متصل شده اند، تشکیل می شود، به طوری که این دو نیم بیضی دارای رشد جانبی یکسان ولی با امکان رشد قائم متفاوت هستند (شکل ۵ الف). به علاوه سیال تزریقی، خطوط جریان از پیش تعیین شده ای را که از بازه سوراخ شده چاه تالبه های بیضی ادامه دارند، دنبال می کند [۱۱]. گسترش این کنتور بیضوی به یک بیضی جدید در یک گام زمانی بعد، به وسیله مدل های شکست هیدرولیکی دوبعدی (KGD و PKN) انجام می شود، به طوری که یکی از آنها بر رشد میان صفحه<sup>۵</sup> افقی و جریان سیال در جهت جانبی (x) حاکم می باشد، و دیگری بر رشد میان صفحه عمودی و احتمالاً جریان سیال در جهت قائم (z) (شکل ۵ ب). بدین ترتیب در هر گام زمانی، طول ترک، محل نوک نیم بیضی بالایی و نوک



شکل ۵- الف) نمایش شماتیک هندسه ترک بر مبنای مدل بیضوی متمرکز [۲]، ب) مفهوم فرمول بندی مدل های متمرکز [۲۶]

1. Pseudo Three Dimensional Models
2. Planar Three Dimensional Models
3. General or Non-planar Three Dimensional Models
4. Lumped Models
5. Cell-based Models



شکل ۶- نمایش شماتیک هندسه ترک بر مبنای مدل سلولی [۲]

ترک، قادرند رشد خارج از صفحه ترک را مدل کنند. این شبیه‌سازها اگر چه به لحاظ محاسباتی پرهزینه هستند و برای به دست آوردن یا تفسیر نتایج عموماً به یک متخصص نیاز دارند، ولی پرکاربردترین مدل‌های شکست هیدرولیکی در حوزه تحقیقاتی می‌باشند [۱۱].

وندنم و کارن [۳۰]، یاماموتو و همکاران [۲۸، ۳۱]، کارتر و همکاران [۷]، از محققینی هستند که در حوزه مدل‌سازی سه بعدی انتشار ترک‌های هیدرولیکی با گسترش خارج از صفحه کار کرده‌اند.

### رویکرد پیشنهادی برای مدل‌سازی شروع و گسترش شکاف هیدرولیکی در مخازن نفت و گاز

همان‌طور که گفته شد، غالب تحقیقاتی که تاکنون در حوزه مدل‌سازی پروسه شکست هیدرولیکی صورت گرفته‌اند، با صرف نظر کردن از اثرات ژئومکانیکی مخزن اطراف ترک و فشار سیالات منفذی داخل مخزن به طور صریح، تنها دو معادله جریان سیال در داخل ترک و یک معادله انتگرالی مبتنی بر الاستیسیته به فرم رابطه ۵ یا ۶ را به صورت همبسته حل نموده‌اند. از طرفی، معدود محققینی که با حل مجموعه معادلات هیدرومکانیکی حاکم بر پروسه شکست هیدرولیکی، رفتار کلی محیط متخلخل دارای ترک را مورد بررسی و تحلیل قرار داده‌اند، با هم‌فاز گرفتن سیال تزریقی و سیال داخل محیط متخلخل، به مدل‌سازی ترک هیدرولیکی در محیط متخلخل تحت شرایط جریان یک سیال محدود شده‌اند. براین اساس، هدف از این تحقیق آن است که یک مدل عددی جهت شبیه‌سازی سه بعدی شروع و گسترش ترک هیدرولیکی در محیط‌های متخلخل اشباع تهیه گردد،

همبسته کنند. این امر موجب شده است که مدل‌های سه بعدی با گسترش صفحه‌ای ترک، دقیق‌تر و به لحاظ محاسباتی پرهزینه‌تر از نمونه‌های شبه سه بعدی باشند [۱۱، ۲۶]. اولین مدل عددی سه بعدی با گسترش صفحه‌ای ترک، توسط کلیفتون و ابوسید [۲۷]، تهیه شد. پس از آن، محققین متعددی تلاش کردند با در نظر گرفتن شرایط کلی‌تر (نظیر انتشار ترک در یک مخزن لایه‌ای، تزریق یک سیال غیرنیوتنی، و ...)، مدل‌های جامع‌تری را ارائه نمایند که از آن جمله می‌توان به مراجع [۹، ۱۵-۱۶، ۲۸]، اشاره نمود.

### مدل‌های سه بعدی کلی یا با گسترش آزاد ترک

مدل‌های سه بعدی با گسترش صفحه‌ای ترک بر مبنای این فرض هستند که ترک عمود بر راستای تنش در جای حداقل میدان دور جهت‌گیری نموده و در طول مسیر انتشار خود از این صفحه خارج نمی‌شود [۱۱]. اما با ابداع تکنولوژی حفاری گمانه‌های مایل یا افقی (گمانه‌ای که در راستای یکی از تنش‌های اصلی میدان دور جهت‌گیری نشده باشد) در چاه‌های نفت و گاز، نیاز به شبیه‌سازهایی است که بتوانند شکل‌گیری کاملاً سه بعدی ترک را بدون هیچ گونه محدودیتی در نظر بگیرند. چراکه وضعیت پیچیده تنش در اطراف یک چاه مایل موجب می‌گردد پیش از آنکه ترک در جهت مورد ترجیح نهایی (عمود بر تنش در جای حداقل میدان دور) جهت‌گیری نماید، در یک راستای خاص شروع شود. در نتیجه، ترک‌هایی که از این گمانه‌ها شروع می‌شوند عموماً دارای گسترش خارج از صفحه بوده و با یک هندسه پیچیده منتشر می‌گردند [۷، ۱۱ و ۲۹]. مدل‌های سه بعدی با گسترش آزاد ترک مدل‌هایی هستند که بدون در نظر گرفتن هیچ فرضی در خصوص جهت‌گیری

رویکرد مش‌بندی مجدد، به منظور جلوگیری از اعوجاج شدید شبکه المان‌ها و فراهم کردن این امکان که مرزهای المان‌ها منطبق بر مرزهای ناپیوستگی باقی بمانند، پس از هر مرحله انتشار ترک، بازه مسئله مجدداً مش‌بندی می‌شود. برای این منظور لازم است که پردازشگرهای تولید مش پیچیده، توانمند، و تطابقی<sup>۳</sup> ایجاد شوند. در واقع این پردازشگرهای تطابقی ملزم می‌کنند که متغیرهای مسئله بین مش‌های استفاده شده در مراحل متوالی تحلیل (یا همان انتشار ترک)، نگاشت شوند. این پروسه نگاشت<sup>۴</sup> منجر به افزایش حجم محاسبات و همچنین کاهش دقت جوابها می‌گردد [۳۲]. راه حل مؤثرتر برای اجتناب از این مشکلات، استفاده از یک روش بی‌شبکه<sup>۵</sup> می‌باشد. در این روش هیچ‌گونه المان و در نتیجه اتصال یا ارتباط از پیش تعریف شده‌ای<sup>۶</sup> بین گره‌ها وجود ندارد. این امر این امکان را فراهم می‌کند تا هر زمان و هر کجا که نیاز باشد، گره‌ها بتوانند حذف یا اضافه شوند. در نتیجه، ویژگی اصلی روش‌های بی‌شبکه سهولت وفق‌پذیری و قابلیت مدل‌سازی مرزهای متحرک و ناپیوستگی‌ها می‌باشد [۳]. با توجه به این ویژگی، علیایی [۳] با استفاده از روش بی‌شبکه<sup>۶</sup> EFG یک مدل عددی دوبعدی تهیه نمود و نشان داد که این روش کارایی لازم را جهت مدل‌سازی عددی مسئله انتشار ترک هیدرولیکی دارا است. براین اساس، در این تحقیق نیز برای مدل‌سازی پروسه شکست هیدرولیکی به صورت سه بعدی تکنیک عددی بی‌شبکه EFG اتخاذ شده است.

#### فرمول‌بندی ریاضی مسئله

##### مجازسازی بازه مکانی

جهت مجازسازی مکانی معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی حاکم بر مسئله با استفاده از روش بی‌شبکه EFG، در ابتدا لازم است با اعمال روش باقی‌مانده وزنی<sup>۸</sup> فرم انتگرالی معادلات دیفرانسیلی مربوطه به دست آید.

به طوریکه قادر باشد رفتارهای الاستیک خطی، غیرخطی، و الاستوپلاستیک مخزن از نظر ژئومکانیکی را لحاظ کند. به علاوه از طریق متفاوت در نظر گرفتن سیال تزریق شده و سیال داخل محیط متخلخل، اثر پدیده هرزروی سیال تزریقی از ترک به مخزن، و رفتار ژئومکانیکی محیط متخلخل اطراف ترک در حالت جریان دو سیال مورد بررسی قرار گیرد. برای دستیابی به این منظور لازم است تمامی معادلات حاکم بر شکست هیدرولیکی که در بخش ۳ به آنها اشاره شد، به صورت همزمان به شیوه‌ای عددی حل گردند. لذا در ادامه این مقاله، رویکرد پیشنهادی مورد استفاده در این تحقیق و سپس فرم مجازسازی شده معادلات حاکم ارائه خواهند شد.

#### نحوه مدل‌سازی عددی مسئله

روش اجزاء محدود در مدل‌سازی محیط‌های ترک خورده که هندسه ترک در آنها معلوم می‌باشد کارایی خود را به اثبات رسانده است. با اینحال، شبیه‌سازی انتشار ترک با مسیرهای کاملاً آزاد و پیچیده در محیط‌های ترک نخورده با استفاده از این روش، خصوصاً زمانی که مسیر رشد ترک بر مرز بین المان‌ها منطبق نباشد، امری بسیار مشکل است [۳۲]. به منظور تحلیل این نوع مسائل در روش اجزاء محدود، رویکردهای متعددی پیشنهاد شده‌اند که از آن جمله می‌توان: ۱- روش مدل‌سازی ترک در مرز المان‌ها، ۲- مدل‌سازی ترک درون المان‌ها، و ۳- رویکردهای مش‌بندی مجدد<sup>۱</sup> را نام برد. در مدل‌سازی ترک در مرز المان‌ها، ترک‌ها در بین المان‌ها رخ می‌دهند نه در درون آنها. از این رو، به منظور مدل‌سازی هندسه واقعی ترک در این روش لازم است که از یک شبکه ریز از المان‌ها استفاده شود. در نتیجه ایده در نظر گرفتن ترک در مرز المان‌ها، منجر به وابستگی جواب‌ها به شبکه اجزاء محدود می‌گردد [۳]. در مدل‌سازی ترک درون المان‌ها که روش اجزاء محدود توسعه یافته (XFEM)<sup>۲</sup> نامیده می‌شود، ترک به مرز بین المان‌ها محدود نمی‌شود و می‌تواند در داخل المان نیز رخ دهد. در این روش معمولاً توابع درونیابی المان به وسیله اضافه کردن برخی توابع شکل مناسب، تغییر داده می‌شوند. هر چند که در برخی موارد این توابع شکل اضافی باعث ناهمسازی در المان‌ها و قفل شدگی مش می‌شوند [۳]. در

1. Remeshing
2. Extended Finite Element Method
3. Adaptive
4. Mapping Process
5. Mesh Free Methods
6. Predefined Connectivity
7. Element Free Galerkin Method
8. Weighted Residual Method

$$\left[ \frac{k_{ij} k_{r mw}}{\mu_{mw}} (-p_{mw,j} + \rho_{mw} g_j) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{pw}} \delta p_{mw}^T \bar{q}_{mw} d\Gamma + \delta \int_{\Gamma_{pw}} 1/2 (p_{mw} - \bar{p}_{mw})^T \alpha_{ppw} (p_{mw} - \bar{p}_{mw}) d\Gamma = 0$$

در معادلات فوق، تنش مؤثر تعمیم یافته اصلاح شده<sup>۵</sup>،  $\delta_{ij}$  kronecker delta،  $\delta u$  و  $\delta p_w$  و  $\delta p_{mw}$  توابع آزمون<sup>۶</sup> معادلات تعادل و پیوستگی فازهای سیال،  $\varepsilon_{ii}$  کرنش حجمی اسکلت جامد خاک، بالانویس (۰) نمایش دهنده مشتق نسبت به زمان، ضرایب  $\alpha_{ppw}$ ،  $\alpha_{pw}$  و  $\alpha_{ppmw}$  به ترتیب ضرایب پنالتی جهت اعمال شرایط مرزی ضروری معادله تعادل، معادله پیوستگی سیال حفره ای ترکنده و معادله پیوستگی سیال منفذی غیر ترکنده، و عملگرهای  $L = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}^T$  و  $L_p = [\partial/\partial x \quad \partial/\partial y \quad \partial/\partial z]^T$  برای متغیرهای جابه‌جایی و فشار سیالات منفذی می‌باشند. (ب) معادلات ماتریسی

مقدار جابه‌جایی و فشار سیالات منفذی در هر زمان و در هر مکان با استفاده از توابع شکل EFG تقریب زده می‌شوند:

$$u^h = \begin{Bmatrix} u_x^h \\ u_y^h \\ u_z^h \end{Bmatrix} = \sum_I^n \begin{bmatrix} \varphi_I & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_I & 0 \\ 0 & 0 & \varphi_I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{xI} \\ u_{yI} \\ u_{zI} \end{Bmatrix} = \sum_I^n \Phi_I u_I \quad (16)$$

$$p_\pi^h = \sum_I^n \varphi_I p_{\pi I} \quad (\pi = w, mw) \quad (17)$$

$u^h$  جابه‌جایی تقریب زده شده،  $P^h$  فشار منفذی تقریب زده شده،  $u_I$  جابه‌جایی در گره  $I$ ،  $P_I$  فشار منفذی در گره  $I$ ،  $n$  تعداد گره‌های موجود در همسایگی نقطه انتگرال‌گیری مورد نظر، و  $\varphi_I$  تابع شکل EFG می‌باشد. با جای‌گذاری روابط فوق در معادلات ۱۳، ۱۴ و ۱۵، معادلات انتگرالی به دست آمده در قسمت قبل مجزاسازی شده و پس از انجام برخی عملیات جبری در نهایت به معادلات ماتریسی تبدیل می‌شوند. این مجموعه معادلات ماتریسی مجزاسازی شده در مکان تشکیل یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی معمولی

سپس با در نظر گرفتن جابجایی و فشار سیالات حفره ای به عنوان متغیرهای اصلی مسئله و استفاده از توابع شکل یکسان EFG برای تقریب زدن مقدار این متغیرها در هر نقطه دلخواه در بازه مکانی مسئله، معادلات انتگرالی حاصل به معادلات ماتریسی تبدیل شوند. معادلات حاکم بر رفتار مکانیکی محیط متخلخل، یعنی معادله تعادل ۱ و پیوستگی فازهای سیال ۳ و ۴ به روش فوق مجزاسازی شده، و در نتیجه فرمول‌بندی مسئله جهت تحلیل همبسته<sup>۱</sup> تغییر شکل‌های خاک- جریان سیال در سازند اطراف ترک هیدرولیکی تحت شرایط جریان دو سیال به دست آمده است. در ادامه به طور مختصر به فرآیند مجزاسازی اشاره خواهد شد.

#### الف- معادلات انتگرالی

با بکارگیری روش باقیمانده وزنی، جایگزینی شرایط مرزی ۸ و اعمال شرایط مرزی ضروری به روش پنالتی<sup>۲</sup>، استفاده از اصل تنش مؤثر<sup>۳</sup> ترزاقی ( $\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij} - \alpha p \delta_{ij}$ )، و به کارگیری تکنیک گالرکین<sup>۴</sup>، معادله انتگرالی مقید گالرکین برای معادله تعادل ۱ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\int_{\Omega} \delta (Lu)^T \sigma_{ij}^* d\Omega - \int_{\Omega} \delta u^T \rho g_i d\Omega - \int_{\Gamma_w} \delta u^T \bar{t}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \delta (Lu)^T \alpha \delta_{ij} (S_w p_w + (1 - S_w) p_{mw}) d\Omega + \delta \int_{\Gamma_w} 1/2 (u - \bar{u})^T \alpha_{pw} (u - \bar{u}) d\Gamma = 0 \quad (13)$$

معادلات پیوستگی فازهای سیال ترکنده ۳ و غیر ترکنده ۴ نیز به طور مشابه، پس از جایگزینی معادله ۲ در آنها، اعمال روش باقی‌مانده وزنی و تکنیک گالرکین، جایگذاری شرایط مرزی ۹ و وضع شرایط مرزی ضروری به روش پنالتی، به ترتیب به فرم‌های انتگرالی مقید گالرکین زیر تبدیل می‌شوند:

$$\int_{\Omega} \delta p_w^T [S_w \frac{\alpha - n}{K_s} (S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) + \frac{n S_w}{K_m} - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c}] \dot{p}_w d\Omega + \int_{\Omega} \delta p_w^T [S_w \frac{\alpha - n}{K_s} (1 - S_w - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c}] \dot{p}_m d\Omega + \int_{\Omega} \delta p_w^T \omega S_w \dot{\varepsilon}_i d\Omega - \int_{\Omega} \delta (L_p p_w)^T \left[ \frac{k_{ij} k_{r mw}}{\mu_{mw}} (-p_{w,j} + \rho_w g_j) \right] d\Omega + \int_{\Gamma_{pw}} \delta p_w^T \bar{q}_w d\Gamma + \delta \int_{\Gamma_{pw}} 1/2 (p_w - \bar{p}_w)^T \alpha_{ppw} (p_w - \bar{p}_w) d\Gamma = 0 \quad (14)$$

$$\int_{\Omega} \delta p_w^T [(1 - S_w) \frac{\alpha - n}{K_s} (S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c}] \dot{p}_w d\Omega + \int_{\Omega} \delta p_w^T [(1 - S_w) \frac{\alpha - n}{K_s} (1 - S_w - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} + n \frac{(1 - S_w)}{K_m}] \dot{p}_m d\Omega + \int_{\Omega} \delta p_w^T \alpha (1 - S_w) \dot{\varepsilon}_{ii} d\Omega - \int_{\Omega} \delta (L_p p_{mw})^T \times \quad (15)$$

1. Coupled Analysis
2. Penalty Method
3. Effective Stress Principle
4. Galerkin
5. Modified Effective Stress
6. Test Functions

بر یک مخزن تغییر شکل پذیر با دو سیال، در نهایت به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌شود که از حل آن مقادیر مجهولات مسئله شامل جابه‌جایی و فشار سیالات منفذی در هر مکان و زمان قابل محاسبه خواهند بود. اما از آنجایی که ماتریس‌های ضرایب و بردار نیرو در دستگاه معادلات جبری فوق خود توابعی از متغیرهای مسئله می‌باشند، لذا این دستگاه معادلات یک دستگاه معادله غیرخطی می‌باشد و برای تعیین مقدار مجهولات در هر گام زمانی لازم است از روش‌های تکرار (نظیر تکرار مستقیم یا نیوتن رافسون) استفاده شود.

#### مدل‌سازی پروسه شکست هیدرولیکی

جهت مدل‌سازی پروسه شکست هیدرولیکی در مخزن، سه معادله دیفرانسیلی ژئومکانیک مخزن، و معادلات پیوستگی دو سیال به صورت همزمان و کاملاً همبسته مورد تحلیل قرار می‌گیرد. مبنای شروع و گسترش ترک هیدرولیکی تحلیل میدان تنش‌ها در مخزن می‌باشد. تنش‌های ایجاد شده در نقاط مختلف مخزن در پایان هر سیکل محاسباتی با معیارهای مکانیک شکست مقایسه شده و در صورت ارضای شرایط مربوطه وقوع ترک یا انتشار آن در محیط مخزن مدل‌سازی می‌شود. از معادله ۱۰ برای تعیین فشار سیال داخل ترک و تعیین مقدار هرزروی<sup>۲</sup> سیال تزریقی به جداره‌های ترک استفاده می‌گردد.

#### نتیجه‌گیری

تحریک مخازن نفتی با شکست هیدرولیکی به طور گسترده‌ای در مهندسی ذخائر نفت مورد استفاده قرار می‌گیرد. با توجه به گستردگی دامنه کاربرد پدیده شکست هیدرولیکی در صنعت و علوم مهندسی، نیاز به مدل‌های تحلیلی و عددی که بتوانند رفتار این پدیده را بادر نظر گرفتن جنبه‌های مختلف آن پیش‌بینی نمایند، کاملاً محسوس بوده است. در این راستا، طی چند دهه گذشته مدل‌های متعددی شامل مدل‌های دوبعدی، شبه سه بعدی، و سه بعدی ایجاد شده‌اند. به طور کلی

1. Generalized Midpoint Method  
2. Leak-off  
3. Traction

در زمان را می‌دهند که برای راحتی به شکل زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} C_{11} + C_u^\alpha & -C_{12} & -C_{13} \\ C_{12}^T & C_{22} & C_{23} \\ C_{13}^T & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U} \\ \dot{P}_w \\ \dot{P}_{mw} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} + K_{p_v}^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & K_{33} + K_{p_m}^\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U \\ P_w \\ P_{mw} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial t (F_u + F_u^\alpha) \\ F_{p_w} + F_{p_w}^\alpha \\ F_{p_{mw}} + F_{p_{mw}}^\alpha \end{Bmatrix} \quad (18)$$

در دستگاه معادلات فوق، معادله اول فرم ماتریسی مجزاسازی شده نهایی معادله تعادل، و معادله دوم و سوم به ترتیب فرم ماتریسی مجزاسازی شده نهایی معادلات پیوستگی سیالات ترک‌کننده و غیرترک‌کننده می‌باشند. بدین ترتیب هر یک از درایه‌های دستگاه معادله ۱۸، یک ماتریس یا بردار می‌باشد که از برهم‌نهی ماتریس‌ها و بردارهای گرهی تشکیل شده است. این ماتریس‌ها و بردارهای گرهی در ضمیمه مقاله ارائه شده‌اند.

#### مجزاسازی در بازه زمانی

برای مجزاسازی دستگاه معادله ۱۶ در زمان از تکنیک تفاضل محدود و روش دوزنقه‌ای تعمیم یافته<sup>۱</sup> یا قانون نقطه میانی تعمیم یافته<sup>۲</sup> استفاده می‌شود. طبق این روش مجزاسازی زمانی، مقدار متغیرهای مسئله و مشتق آنها در فاصله بین دو گام زمانی متوالی  $n$  و  $n+1$  به صورت زیر قابل بیان خواهند بود [۱۰]:

$$(dx/dt)_{n+\theta} = (X_{n+1} - X_n) / \Delta t, \quad X_{n+\theta} = (1-\theta)X_n + \theta X_{n+1} \quad (0 \leq \theta \leq 1)$$

با اعمال روش مجزاسازی فوق به دستگاه معادلات دیفرانسیلی معمولی ۱۸، دستگاه معادلات جبری زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} C_{11} + C_u^\alpha & C_{12} & C_{13} \\ C_{12}^T & C_{22} + \theta \Delta t (K_{22} + K_{p_v}^\alpha) & C_{23} \\ C_{13}^T & C_{32} & C_{33} + \theta \Delta t (K_{33} + K_{p_m}^\alpha) \end{bmatrix}^{n+\theta} \begin{Bmatrix} U \\ P_w \\ P_{mw} \end{Bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} C_{11} + C_u^\alpha & C_{12} & C_{13} \\ C_{12}^T & C_{22} - (1-\theta) \Delta t (K_{22} + K_{p_v}^\alpha) & C_{23} \\ C_{13}^T & C_{32} & C_{33} - (1-\theta) \Delta t (K_{33} + K_{p_m}^\alpha) \end{bmatrix}^{n-\theta} \begin{Bmatrix} U \\ P_w \\ P_{mw} \end{Bmatrix}^n + \Delta t \begin{Bmatrix} \partial/\partial t (F_u + F_u^\alpha) \\ F_{p_w} + F_{p_w}^\alpha \\ F_{p_{mw}} + F_{p_{mw}}^\alpha \end{Bmatrix}^{n+\theta} \quad (19)$$

بدین ترتیب، معادلات دیفرانسیلی با مشتقات جزئی حاکم

ارائه خواهد شد.

### تشکر و قدردانی

نویسندگان این مقاله از "صندوق حمایت از پژوهشگران و فناوریان کشور" که طی قرارداد شماره ۹۰۰۰۸۱۷۴ حمایت مالی از این پروژه تحقیقاتی را برعهده دارند، صمیمانه سپاس‌گزار می‌نمایند.

### پیوست

در این قسمت، درایه‌های ماتریس‌های تشکیل دهنده معادله ۱۸ ارائه می‌شوند:

- ماتریس‌ها و بردارهای گرهی مربوط به مجزاسازی معادله تعادل به روش EFG:

$$C_{1 \ \nu} = \int_{\Omega} B_I^T D_T B_J \, d\Omega \quad (1-1)$$

$$C_{u \ \nu}^{\alpha} = \int_{\Gamma} \Phi_I^T \alpha_p \Phi_J \, d\Gamma \quad (1-2)$$

$$C_{2 \ \nu} = \int_{\Omega} B_I^T \alpha m S_w \varphi_J \, d\Omega \quad (1-3)$$

$$C_{3 \ \nu} = \int_{\Omega} B_I^T \alpha m (1 - S_w) \varphi_J \, d\Omega \quad (1-4)$$

$$F_{u \ \nu} = \int_{\Omega} \Phi_I^T \rho g \, d\Omega + \int_{\Gamma_v} \Phi_I^T \bar{t} \, d\Gamma \quad (1-5)$$

$$F_{u \ \nu}^{\alpha} = \int_{\Gamma_w} \Phi_I^T \alpha_p \bar{u} \, d\Gamma \quad (1-6)$$

- ماتریس‌ها و بردارهای گرهی مربوط به مجزاسازی معادله پیوستگی سیال ترکننده به روش EFG:

$$C_{2 \ \nu} = \int_{\Omega} \varphi_I \left[ S_w \frac{\alpha - n}{K_s} (S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) + \frac{n S_w}{K_w} - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \varphi_J \, d\Omega \quad (1-7)$$

$$C_{3 \ \nu} = \int_{\Omega} \varphi_I \left[ S_w \frac{\alpha - n}{K_s} (1 - S_w - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \varphi_J \, d\Omega \quad (1-8)$$

$$K_{2 \ \nu} = \int_{\Omega} B_I^T \frac{k k_{rw}}{\mu_w} B_J \, d\Omega \quad (1-9)$$

$$K_{p_w \ \nu}^{\alpha} = \int_{\Gamma_{p_w}} \varphi_I \alpha_p \varphi_J \, d\Gamma \quad (1-10)$$

$$F_{p_w \ \nu} = \int_{\Omega} B_I^T \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \rho_w g \, d\Omega - \int_{\Gamma_w} \varphi_I \bar{q}_w \, d\Gamma \quad (1-11)$$

$$F_{p_w \ \nu}^{\alpha} = \int_{\Gamma_{p_w}} \varphi_I \alpha_p \bar{p}_w \, d\Gamma \quad (1-12)$$

- ماتریس‌ها و بردارهای گرهی مربوط به مجزاسازی معادله پیوستگی سیال غیرترکننده به روش EFG:

$$C_{3 \ \nu} = \int_{\Omega} \varphi_I \left[ (1 - S_w) \frac{\alpha - n}{K_s} (S_w + \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) + n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} \right] \varphi_J \, d\Omega \quad (1-13)$$

شکست هیدرولیکی پروسه پیچیده‌ای است که در آن پدیده‌های فیزیکی مختلف، و در پایه‌ای‌ترین حالت سه پدیده: ۱- تغییر شکل محیط متخلخل اشباع سازند مخزن، ۲- جریان سیال در ترک و محیط اطراف آن، و ۳- شروع و انتشار ترک در محیط، با هم درگیر می‌باشند. علت اندرکنش بین این پدیده‌ها آن است که اثرات ژئومکانیکی بر تخلخل و نفوذپذیری مخزن تأثیر می‌گذارد. این اثرات به نوبه خود، جریان در محیط متخلخل و توزیع فشارسیالات منفذی را متأثر می‌سازد. ابعاد و هندسه ترک‌های ایجاد شده تابعی از فشار سیال داخل ترک از یک سو و میدان فشار سیالات منفذی در پیرامون ترک از سوی دیگر می‌باشد. همچنین، جریان سیال در داخل ترک از طریق اعمال تنش سطحی نرمال<sup>۱</sup> بر روی سطوح ترک بر شرایط ژئومکانیکی مخزن تأثیر می‌گذارد و از طریق تراوش سیال از ترک به سازند، مود شکست را تحت تأثیر قرار می‌دهد. بنابراین لازم است تا به منظور مدل‌سازی صحیح فیزیک مسئله شکست هیدرولیکی، تمامی معادلات حاکم بر پدیده‌های فوق به صورت همزمان و همبسته حل شوند.

در مقاله حاضر چارچوب و فرمول‌بندی ریاضی یک مدل سه بعدی برای پیش‌بینی شروع و گسترش شکاف هیدرولیکی در مخازن نفت و گاز ارائه شد. مدل پیشنهادی قادر است که رفتارهای الاستیک خطی / غیرخطی و الاستوپلاستیک مخزن را در تحلیل مسئله در نظر گرفته و تأثیر آنها را بر شروع و گسترش ترک در مخزن لحاظ نماید. مبانی هیدرولیکی مدل که قادر است جریان دو سیال را همزمان در نظر بگیرد، می‌تواند در مدل‌سازی عملیات میدانی شکست هیدرولیکی و تزریق سیالات با ویژگی‌های مختلف کارایی داشته باشد. رویکرد بی‌شبکه در این مدل عددی و مزایای آن در حذف محدودیت‌های روش‌های معمول مانند اجزاء محدود و انتگرال مرزی، در شبیه‌سازهای شکست هیدرولیکی تاکنون مورد استفاده قرار نگرفته است. مقاله حاضر بخشی از تحقیق در حال انجام توسط نگارندگان بوده و نتایج آن در مقالات بعدی

$$F_{p_w, l}^{\alpha} = \int_{\Gamma_{p_w}} \varphi_l \alpha_{p_w} \bar{p}_w d\Gamma \quad (1-18)$$

در روابط فوق،  $B_l = L(\varphi_l)$ ، ماتریس رفتاری ژئومکانیکی مخزن،  $B_{\beta} = L_{\beta}(\varphi_l)$  و  $m = \{1, 1, 1, 0, 0, 0\}^T$  می باشد.

$$C_{3, \beta} = \int_{\Omega} \varphi_l \left[ (1-S_w) \frac{\alpha-n}{K_s} (1-S_w - \frac{\partial S_w}{\partial p_c} p_c) - n \frac{\partial S_w}{\partial p_c} + \frac{n(1-S_w)}{K_w} \right] \varphi_j d\Omega \quad (1-14)$$

$$K_{3, \beta} = \int_{\Omega} B_{\beta}^T \frac{k k_{rw}}{\mu_w} B_{\beta} d\Omega \quad (1-15)$$

$$K_{p_w, \beta}^{\alpha} = \int_{\Gamma_{p_w}} \varphi_l \alpha_{p_w} \varphi_j d\Gamma \quad (1-16)$$

$$F_{p_w, l}^{\alpha} = \int_{\Omega} B_{\beta}^T \frac{k k_{rw}}{\mu_w} \rho_w g d\Omega - \int_{\Gamma_{p_w}} \varphi_l \bar{q}_w d\Gamma \quad (1-17)$$

## مراجع

- [1]. Mendelsohn D. A., "A review of hydraulic fracture modeling-I: general concepts, 2D models, motivation for 3D modeling", J. Energy Resour. Technol., 106, pp. 369–376, 1984a.
- [2]. Adachi J., Siebrits E., Peirce A., and Desroches J., "Computer simulation of hydraulic fractures", Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 44, pp. 739–757, 2007.
- [۳]. علیایی، م. ن.، «مدل سازی عددی همبسته انتشار ترک هیدرولیکی در محیط های متخلخل اشباع با روش بی شبکه EFG»، پایان نامه دکتری، دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف، ۱۳۸۶.
- [۴]. روحانی ع. ل.، «مدل سازی شروع و گسترش ترک های هیدرولیکی از یک گمانه»، پایان نامه دکتری، دانشکده مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ۱۳۸۷.
- [5]. Pak A., *Numerical modeling of hydraulic fracturing*, PhD thesis, University of Alberta, Canada, 1997.
- [6]. Wang S. Y., Sun L., Au A. S. K., Yang T. H., and Tang C. A., "2D-numerical analysis of hydraulic fracturing in heterogeneous geo-materials", Construction and Building Materials, 23, pp. 2196–2206, 2009.
- [7]. Carter B. J., Desroches J., Ingraffea A. R., and Wawrzynek P. A., *Simulating fully 3D hydraulic fracturing*, In: Zaman, M., Booker, J., Gioda, G. (Eds.), Modeling in Geomechanics, Wiley Publisher, 2000.
- [8]. Veatch R. W., Moschovidis, Z. A., and Fast, C. R., "An overview of hydraulic fracturing", In: Gidley, Holditch, Nierode, Veatch, editors. Recent advances in hydraulic fracturing. Monograph, Vol. 12, Richardson: Society of Petroleum Engineers, pp. 1-38, 1989.
- [9]. Lam K. Y., and Cleary M. P., "Three-dimensional analysis of hydraulic fracturing", Computers and Geotechnics, 3, pp. 213-228, 1987.
- [10]. Lewis R. W., and Schrefler B. A., *The Finite Element Method in the static and dynamic deformation and consolidation of porous media*, 2<sup>nd</sup> ed. Chichester, Wiley, 1998.
- [11]. Mack M. G., and Warpinski N. R., *Mechanics of hydraulic fracturing*, In: Economides, Nolte, editors. Reservoir stimulation. 3<sup>rd</sup> ed. Chichester; Wiley, Chapter 6, 2000.
- [12]. Modaresi H., and Aubert Ph., "Element-Free Galerkin method for deforming multiphase porous media", Int. J. Numer. Meth. Engng., 42, pp. 313-340, 1998.
- [13]. Schrefler, B.A., and Scotta, R., "A fully coupled dynamic model for two-phase fluid flow in deformable porous media", Comput. Methods Appl. Mech. Engng., 3223, 3223-3246, 2001.
- [14]. Batchelor, G., "An introduction to fluid dynamics", Cambridge UK: Cambridge University Press, 1967.

- [15] Advani, S.H., Lee, T.S. and Lee, J.K., "Three dimensional modeling of hydraulic fractures in layered media: Finite element formulations", J. Energy Res. Tech., 112, 1-18, 1990.
- [16] Devloo Ph. R. B., Fernandes P. D., Gomesc S. M., Bravo C. M. A. A., and Damas R. G., "A finite element model for three dimensional hydraulic fracturing", Mathematics and Computers in Simulation, 73, pp. 142–155, 2006.
- [17] Ingraffea A. R., "Theory of crack initiation and propagation in rock", In: Atkinson, B.K. (Ed.), Fracture Mechanics of Rock. Academic Press Inc., London, pp. 71–110, 1987.
- [18] Khristianovic S. A., and Zheltov Y. P., "Formation of vertical fractures by means of highly viscous liquid", In: Proceedings of the fourth world petroleum congress, Rome, pp. 579–586, 1955.
- [19] Perkins T. K., and Kern L. R., "Widths of hydraulic fractures", JPT, 13(9), 937–949, 1961.
- [20] Geertsma J., and de Klerk F., "A rapid method of predicting width and extent of hydraulically induced fractures", JPT, 21, pp. 1571–1581, 1969.
- [21] Nordgren R. P., "Propagation of a vertical hydraulic fracture", SPE Journal, 12(8), 306–314, 1972.
- [22] Geertsma J., and Haafkens R., "Comparison of the Theories to Predict Width and Extent of Vertical Hydraulically Induced Fractures", 31<sup>st</sup> Annual Petroleum Mechanical Engineering Conference, 1979.
- [23] Abe H., Mura T., and Keer L., "Growth rate of a penny-shaped crack in hydraulic fracturing of rocks", J. Geophys. Res., 81, pp. 5335-5340, 1976.
- [24] Advani S. H., Torok J., Lee J. K., and Choudhry S., "Explicit time dependent solutions and numerical evaluations for penny-shaped hydraulic fracture models", J. Geophys. Res., 92(B8), pp. 8049-8055, 1987.
- [25] Savitski A., and Detournay E., "Propagation of a fluid-driven penny-shaped fracture in an impermeable rock: asymptotic solutions", Int. J. Solids Struct., 39, pp. 6311–6337, 2002.
- [26] Mendelsohn D. A., "A review of hydraulic fracture modeling-II: 3D modeling and vertical growth in layered rock", J. Energy Resour. Technol., 106, pp. 543–553, 1984b.
- [27] Clifton R. J., and Abou-Sayed A. S., "On the computation of the three-dimensional geometry of hydraulic fractures", SPE 7943, Proc., 1979 SPE of AIME Low Permeability Gas Reservoirs, Society of Petroleum Engineers, Denver, pp. 433–451, 1979.
- [28] Dean R. H., and Schmidt, J. H., "Hydraulic-Fracture Predictions With a Fully Coupled Geomechanical Reservoir Simulator", SPE Journal, pp. 707-714, 2009.
- [29] Yamamoto K., Shimamoto T., and Maezumi M., "Development of a true 3D hydraulic fracturing simulator", SPE 54265, Proc., Asia Pacific Oil and Gas Exhibition and Conf., Society of Petroleum Engineers, Jakarta, Indonesia, 1999.
- [30] Vandamme L., and Curran J. H., "A Three-dimensional hydraulic fracturing simulator", Int. J. Numer. Meth. Engng., 28, pp. 909–927, 1989.
- [31] Yamamoto, K., Shimamoto, T., and Sukemura, Sh., "Multiple fracture propagation model for a three-dimensional hydraulic fracturing simulator", Int. J. Geomech., 4(1), 46–57, 2004.
- [32] Liu, G.R., "Meshfree methods-Moving beyond the finite element method", CRC Press, 2003.